

投影对代数组合的谱和范数*

朱彤, 宋显花

青海师范大学数学与统计学院, 青海 西宁 810008

摘要: 首先研究 Hilbert 空间 H 上投影对 P, Q 的积 PQ , Jordan 积 $PQ + QP$, 三乘 Jordan 积 PQP , 拟积 $P + Q - PQ$ 和 Lie 积 $PQ - QP$ 的谱. 其次, 研究了投影对线性组合 $\alpha P + \beta Q (\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ 的谱和范数. 同时, 也得到了非零投影对的和、差、积、Jordan 积及 Lie 积的范数之间的关系.

关键词: 投影对; 正则投影对; 算子的谱; 范数

中图分类号: O177.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(XXXX)XX-0001-10

Spectra and norms of algebraic combinations of projection pairs

Zhu Tong, Song Xianhua

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Normal University, Xining 810008, China

Abstract: This paper first investigates the spectra of the product PQ , Jordan product $PQ + QP$, triple Jordan product PQP , quasi-product $P + Q - PQ$ and Lie product $PQ - QP$ for pairs of projections P, Q on Hilbert space H . Secondly, it investigates the spectra and norms of the linear combination $\alpha P + \beta Q (\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ of projection pairs. Meanwhile, the relationships between the norms of the sum, difference, product, Jordan product and Lie product of non-zero projection pairs are also derived.

Key words: pair of projection; generic pair of projection; spectrum of operator; norm

近年来, 学者们对正交投影 (简称投影) 对各类代数组合的谱结构展开了进一步探索, Li (2004) 研究了可分复 Hilbert 空间上一个有界线性算子 T 能够写成投影对 P, Q 的 Lie 积 $PQ - QP$ 的充要条件是 $T^* = -T$, $\|T\| \leq \frac{1}{2}$ 且 T 酉等价于 T^* , 建立了算子结构与投影对的 Lie 积之间的联系. Du et al. (2005) 讨论了投影对差的范数, Wang et al. (2008) 讨论了投影对的 Lie 积的范数, 得到了

$$\{\|PQ - QP\| : P, Q \text{ 是 } B(H) \text{ 中的投影}\} = \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Cui et al. (2012) 研究了投影对 Jordan 积的谱特性, 刻画了 Jordan 积的保持外围谱的等价条件. Klaja (2014) 刻画了两个投影乘积的数值域的闭包, 将其表示为以谱中点为参数的若干显式椭圆的闭凸包. 吴文明等 (2021) 研究了可分复 Hilbert 空间上投影对的和与差的谱, Bikhentayev (2022) 给出了投影对的差与 Lie 积的范数之间的关系, 得到了当 $\|P - Q\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时有

* 收稿日期: 2026-01-07

录用日期: 2026-05-21

网络首发日期: XXXX-XX-XX

基金项目: 国家自然科学基金 (12261072); 青海省基础研究项目 (2024-ZJ-976);

青海师范大学校级科研项目 (2023QZR003)

作者简介: 朱彤 (2002 年生), 女; 研究方向: 算子理论与算子代数; E-mail: zhutong@stu.qhnu.edu.cn

通信作者: 宋显花 (1981 年生), 女; 研究方向: 算子理论与算子代数; E-mail: songxh@qhnu.edu.cn

全文阅读



ZR20260012

$$\|PQ - QP\| = \|P - Q\| \sqrt{1 - \|P - Q\|^2}.$$

Conde(2022)讨论了两个非零投影的和,差,积, Jordan 积和 Lie 积的范数,得到了以下等式和不等式:

$$\begin{aligned} \|P + Q\| &= 1 + \|PQ\|, \quad \|PQ + QP\| = \|PQ\|^2 + \|PQ\|, \\ 0 \leq \|PQ\| - \|PQ\|^2 &\leq \|PQ - QP\| \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \|PQ\|, \frac{1}{2}\|P + Q\|\|P - Q\|\right\}. \end{aligned}$$

蒋万林等(2021)研究了两个投影 P 和 Q 的组合 $\alpha P + bQ + cPQ$ 的谱和秩的性质. 马楠等(2024)则运用 Halmos 空间分解,研究两个投影 P 和 Q 组合的谱和范数,推广 $(PQ)^n$ 和 $(QP)^n$ 的和与差的范数,给出关于 $\alpha P + \beta Q$ 和 $I + \alpha PQ$ 的范数估计.

尽管已有诸多研究成果,但是对于一般投影对各类代数组组合的谱结构以及谱与范数之间内在联系的刻画仍不够完善. 吴文明等(2021)给出了可分复 Hilbert 空间中投影对的和与差的谱,本文研究了投影对 P, Q 的积 PQ , Jordan 积 $PQ + QP$, 三乘 Jordan 积 PQP , 拟积 $P + Q - PQ$ 和 Lie 积 $PQ - QP$ 的谱,完善了吴文明等(2021)的结果. 同时,本文也研究了非零投影对的和,差,积, Jordan 积和 Lie 积的范数之间的关系,补充了 Conde(2022)的相关结果. Altwaijry et al.(2025)研究了复 Hilbert 空间上非零投影对的线性组合 $\alpha P + \beta Q$ 的范数,得到了当 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 而且 $\alpha\beta \geq 0$ 时的范数公式如下:

$$\|\alpha P + \beta Q\| = \frac{|\alpha| + |\beta| + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta\|PQ\|^2}}{2}.$$

本文用另一种方法证明了此公式,同时得到了 $\alpha P + \beta Q$ 的谱,其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 为此,本文第 1 节研究了正则投影对各类代数组组合的谱和范数. 第 2 节研究了投影对各类代数组组合的谱和范数. 另外,第 2 节也得到了非零投影对的和,差,积, Jordan 积和 Lie 积的范数之间的关系.

为方便描述,下面我们首先介绍一些基本概念和记号. 设 $B(H)$ 是复 Hilbert 空间 H 上有界线性算子全体构成的集合. 设 $A \in B(H)$, A^* , $\|A\|$, $\mathcal{N}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A)$ 分别表示算子 A 的伴随算子、范数、零空间和值域空间, $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ 不可逆}\}$ 和 $r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ 分别表示算子 A 的谱和谱半径. 设 $A \in B(H)$, 若 $AA^* = A^*A$, 则称 A 是正规算子;若 $A = A^*$, 则称 A 是自伴算子;若 A 是自伴算子,且 $\sigma(A)$ 是非负实数集的子集,则称 A 是正算子;若 $A^2 = A^* = A$, 则称 A 是正交投影,简称投影. $P(H)$ 表示 $B(H)$ 中投影全体构成的集合. I 表示对应空间上的恒等算子. 首先给出本文的重要引理.

引理 1 (Halmos, 1969; Du et al., 2005; Böttcher et al., 2010) 设 $P, Q \in P(H)$, $H_1 = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$, $H_2 = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(Q)$, $H_3 = \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$, $H_4 = \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)$, $H_5 = \mathcal{R}(P) \ominus (H_1 \oplus H_2)$, $H_6 = H \ominus \left(\bigoplus_{i=1}^5 H_i\right)$, 则在空间分解 $H = \bigoplus_{i=1}^6 H_i$ 下有

$$P = I_1 \oplus I_2 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} I_5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$Q = I_1 \oplus 0 \oplus I_3 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*(I_5 - Q_0)D \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 Q_0 是 H_5 上的正压缩算子,即 Q_0 是正算子且 $\|Q_0\| \leq 1$, $0, 1$ 不是 Q_0 的点谱, D 是从 H_6 到 H_5 的西算子, $I_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 表示 H_i 上的恒等算子.

特别地,若 $H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = \{0\}$, 则称

$$P = \begin{pmatrix} I_5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*(I_5 - Q_0)D \end{pmatrix} \quad (3)$$

是正则投影对.

1 正则投影对代数组合的谱和范数

吴文明等(2021)研究了可分复 Hilbert 空间上正则投影对的和与差的谱, 下面的定理 1 给出了正则投影对 P, Q 的积 PQ , Jordan 积 $PQ + QP$, 三乘 Jordan 积 PQP , 拟积 $P + Q - PQ$ 和 Lie 积 $PQ - QP$ 的谱.

定理 1 设 P, Q 是可分复 Hilbert 空间 H 上如式(3)所示的正则投影对, 则

- (i) $\sigma(PQ + QP) = \{\lambda \in \mathbb{R} : Q_0^2 - (1 + 2\lambda)Q_0 + \lambda^2 I_5 \text{ 在 } B(H_5) \text{ 中不可逆}\} = \{\mu \pm \sqrt{\mu} : \mu \in \sigma(Q_0)\};$
- (ii) $\sigma(PQ - QP) = \{ia : a \in \mathbb{R}, a^2 \in \sigma(Q_0(I_5 - Q_0))\} = \{\pm i\sqrt{\lambda(1 - \lambda)} : \lambda \in \sigma(Q_0)\};$
- (iii) $\sigma(P + Q - PQ) = \sigma(P + Q - QP) = \{1\} \cup \{1 - \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda \in \sigma(Q_0)\};$
- (iv) $\sigma(PQP) = \sigma(QPQ) = \sigma(PQ) = \sigma(QP) = \{0\} \cup \{\lambda : \lambda \in \sigma(Q_0)\}.$

证明 (i) 设 P, Q 是如式(3)所示的可分复 Hilbert 空间 H 上的正则投影对, 则

$$PQ + QP = \begin{pmatrix} 2Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

是自伴算子, 从而实数 $\lambda \in \sigma(PQ + QP)$ 当且仅当 $PQ + QP - \lambda I$ 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆. 令

$$T = PQ + QP - \lambda I = \begin{pmatrix} 2Q_0 - \lambda I_5 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & -\lambda I_6 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -\lambda I_5 & -Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ -D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*(2Q_0 - \lambda I_5)D \end{pmatrix},$$

则

$$RT = TR = \begin{pmatrix} Q_0^2 - (1 + 2\lambda)Q_0 + \lambda^2 I_5 & 0 \\ 0 & D^*(Q_0^2 - (1 + 2\lambda)Q_0 + \lambda^2 I_5)D \end{pmatrix}.$$

可以证明 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆当且仅当 RT 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆. 事实上, 显然由 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆易知 RT 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆. 反之, 由 RT 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆也可推出 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆. 若 RT 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆, 则 $Q_0^2 - (1 + 2\lambda)Q_0 + \lambda^2 I_5$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆. 又因为 $Q_0^2 - (1 + 2\lambda)Q_0 + \lambda^2 I_5$ 是正规算子, 所以存在一列单位向量 $x_n \in H_5$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Q_0^2 - (1 + 2\lambda)Q_0 + \lambda^2 I_5)x_n = 0,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T \begin{pmatrix} -\lambda x_n \\ -D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}x_n \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (Q_0^2 - (1 + 2\lambda)Q_0 + \lambda^2 I_5)x_n \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

若 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中可逆, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = 0$, 从而 $\lambda = 0$. 此时有 $Q_0^2 - (1 + 2\lambda)Q_0 + \lambda^2 I_5 = -Q_0(I_5 - Q_0)$. 于是由 $-Q_0(I_5 - Q_0)$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆知 Q_0 在 $B(H_5)$ 中不可逆或 $I_5 - Q_0$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆. 若 Q_0 在 $B(H_5)$ 中不可逆, 则存在一列单位向量 $y_n \in H_6$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_0^{\frac{1}{2}}Dy_n = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} T \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} = 0$, 与 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中可逆矛盾. 若

$I_5 - Q_0$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆, 则存在一列单位向量 $z_n \in H_6$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}Dz_n = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} T \begin{pmatrix} 0 \\ z_n \end{pmatrix} = 0$, 与 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中可逆矛盾. 因此 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆.

又因为 RT 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆当且仅当 $Q_0^2 - (1 + 2\lambda)Q_0 + \lambda^2 I_5$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆, 所以 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆当且仅当 $Q_0^2 - (1 + 2\lambda)Q_0 + \lambda^2 I_5$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆. 因此, 由谱定义可得

$$\sigma(PQ + QP) = \{\lambda \in \mathbb{R} : Q_0^2 - (1 + 2\lambda)Q_0 + \lambda^2 I_5 \text{ 在 } B(H_5) \text{ 中不可逆}\}.$$

另外, 注意到

$$Q_0^2 - (1 + 2\lambda)Q_0 + \lambda^2 I_5 = \left(Q_0 + Q_0^{\frac{1}{2}} - \lambda I_5\right) \left(Q_0 - Q_0^{\frac{1}{2}} - \lambda I_5\right).$$

故

$$\sigma(PQ + QP) = \{\mu \pm \sqrt{\mu} : \mu \in \sigma(Q_0)\}.$$

(ii) 因为 $(PQ - QP)^* = -(PQ - QP)$, 所以 $\sigma(PQ - QP) \subseteq \{ia : a \in \mathbb{R}\}$. $ia \in \sigma(PQ - QP)$ 当且仅当 $PQ - QP - iaI$ 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆. 令

$$R = \begin{pmatrix} -iaI_5 & -Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & -iaI_6 \end{pmatrix}, \quad T = PQ - QP - iaI = \begin{pmatrix} -iaI_5 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ -D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & -iaI_6 \end{pmatrix},$$

则

$$RT = TR = \begin{pmatrix} Q_0(I_5 - Q_0) - a^2I_5 & 0 \\ 0 & D^*[Q_0(I_5 - Q_0) - a^2I_5]D \end{pmatrix}.$$

类似于(i)的证明可知 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆当且仅当 RT 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆, 而 RT 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆当且仅当 $Q_0(I_5 - Q_0) - a^2I_5$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆. 故

$$\sigma(PQ - QP) = \{ia : a \in \mathbb{R}, a^2 \in \sigma(Q_0(I_5 - Q_0))\} = \{\pm i\sqrt{\lambda(1-\lambda)} : \lambda \in \sigma(Q_0)\}.$$

(iii) 复数 $\lambda \in \sigma(P + Q - QP)$ 当且仅当 $P + Q - QP - \lambda I$ 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆. 令

$$R = \begin{pmatrix} (1-\lambda)I_5 - Q_0 & -Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ 0 & (1-\lambda)I_6 \end{pmatrix}, \quad T = P + Q - QP - \lambda I = \begin{pmatrix} (1-\lambda)I_5 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ 0 & D^*[(1-\lambda)I_5 - Q_0]D \end{pmatrix},$$

则

$$RT = TR = \begin{pmatrix} (1-\lambda)[(1-\lambda)I_5 - Q_0] & 0 \\ 0 & (1-\lambda)D^*[(1-\lambda)I_5 - Q_0]D \end{pmatrix}.$$

T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆当且仅当 RT 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆, 而 RT 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆当且仅当 $(1-\lambda)[(1-\lambda)I_5 - Q_0]$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆. 故由 $\sigma(Q_0) \subseteq \mathbb{R}$ 知

$$\sigma(P + Q - QP) = \{1\} \cup \{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : 1 - \lambda \in \sigma(Q_0)\} = \{1\} \cup \{1 - \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda \in \sigma(Q_0)\}.$$

又因为 $P + Q - PQ = (P + Q - QP)^*$, 所以 $\sigma(P + Q - PQ) = \sigma(P + Q - QP)$.

(iv) 由

$$PQP = \begin{pmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

易知 $\sigma(PQP) = \{0\} \cup \{\lambda : \lambda \in \sigma(Q_0)\}$. 实数 $\lambda \in \sigma(Q_0)$ 当且仅当 $Q_0 - \lambda I$ 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆, 复数 $\lambda \in \sigma(PQ)$ 当且仅当 $PQ - \lambda I$ 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆. 令

$$T_1 = PQP - \lambda I = \begin{pmatrix} Q_0^2 - \lambda I_5 & Q_0^{\frac{3}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ D^*Q_0^{\frac{3}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*[Q_0(I_5 - Q_0) - \lambda I_5]D \end{pmatrix}, \quad T_2 = PQ - \lambda I = \begin{pmatrix} Q_0 - \lambda I_5 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ 0 & -\lambda I_6 \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} Q_0(I_5 - Q_0) - \lambda I_5 & -Q_0^{\frac{3}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ -D^*Q_0^{\frac{3}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*(Q_0^2 - \lambda I_5)D \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} -\lambda I_5 & -Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ 0 & D^*(Q_0 - \lambda I_5)D \end{pmatrix}.$$

则

$$R_1 T_1 = T_1 R_1 = R_2 T_2 = T_2 R_2 = \begin{pmatrix} -\lambda(Q_0 - \lambda I_5) & 0 \\ 0 & -\lambda D^*(Q_0 - \lambda I_5)D \end{pmatrix}.$$

$T_i (i = 1, 2)$ 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆当且仅当 $R_i T_i (i = 1, 2)$ 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆, 而 $R_i T_i (i = 1, 2)$ 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆当且仅当 $\lambda = 0$ 或 $Q_0 - \lambda I_5$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆. 故

$$\sigma(PQP) = \sigma(PQ) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda \in \sigma(Q_0)\}.$$

又因为 $\sigma(PQ) \subseteq \mathbb{R}$ 且 $(PQ)^* = QP$, 所以 $\sigma(QP) = \sigma(PQ)$.

注 1 由 $\left(\sqrt{\mu} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ 知 $\mu - \sqrt{\mu} \geq -\frac{1}{4}$. 又由 $\sigma(Q_0) \subseteq [0, 1]$ 知定理 1 中 $\sigma(PQ + QP) \subseteq \left[-\frac{1}{4}, 2\right]$. 对于任意实数 $\lambda \in [0, 1]$, 有 $\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, 从而 $\sqrt{\lambda(1-\lambda)} \leq \frac{1}{2}$. 因此 $\sigma(PQ - QP) \subseteq \left\{\pm i\mu : \mu \in \mathbb{R}, 0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}\right\}$. 显然 $\sigma(PQ - QP)$ 关于原点对称. $\sigma(P + Q - PQ) \subseteq [0, 1]$, $\sigma(PQP) \subseteq [0, 1]$.

注 2 由 $0, 1$ 不是 $\sigma(Q_0)$ 的孤立点知 0 不是 $\sigma(PQ - QP)$ 的孤立点, $0, 2$ 不是 $\sigma(PQ + QP)$ 的孤立点, 0 不是 $\sigma(P + Q - PQ)$ 的孤立点, 1 不是 $\sigma(PQP)$ 的孤立点.

Altwaijry et al. (2025) 研究了当 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha\beta \geq 0$, 且 P, Q 是非零投影时, 有

$$\|\alpha P + \beta Q\| = \frac{|\alpha| + |\beta| + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta\|PQ\|^2}}{2}.$$

接下来用吴文明等 (2021) 的方法可以计算出 $\sigma(\alpha P + \beta Q)$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 进一步可以得到 $\|\alpha P + \beta Q\|$.

定理 2 设 P, Q 是可分复 Hilbert 空间 H 上如式 (3) 所示的正则投影对, $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则

$$\sigma(\alpha P + \beta Q) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)}{\alpha\beta} \in \sigma(Q_0) \right\} = \left\{ \frac{\alpha + \beta \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta\mu}}{2} : \mu \in \sigma(Q_0) \right\}.$$

证明 设 P, Q 是可分复 Hilbert 空间 H 上如式 (3) 所示的正则投影对. 因为

$$\alpha P + \beta Q = \begin{pmatrix} \alpha I_5 + \beta Q_0 & \beta Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ \beta D^* Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & \beta D^*(I_5 - Q_0)D \end{pmatrix},$$

所以 $\lambda \in \sigma(\alpha P + \beta Q) \Leftrightarrow \alpha P + \beta Q - \lambda I$ 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆. 令

$$T = \alpha P + \beta Q - \lambda I = \begin{pmatrix} (\alpha - \lambda)I_5 + \beta Q_0 & \beta Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ \beta D^* Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*[(\beta - \lambda)I_5 - \beta Q_0]D \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} (\beta - \lambda)I_5 - \beta Q_0 & -\beta Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ -\beta D^* Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*[(\alpha - \lambda)I_5 + \beta Q_0]D \end{pmatrix}.$$

计算可得

$$RT = \begin{pmatrix} (\beta - \lambda)(\alpha - \lambda)I_5 - \alpha\beta Q_0 & 0 \\ 0 & D^*[(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)I_5 - \alpha\beta Q_0]D \end{pmatrix} = TR.$$

可以证明 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆当且仅当 RT 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆.

事实上, 若 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆, 则显然 RT 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆. 反之, 设 RT 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆, 则 $(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)I_5 - \alpha\beta Q_0$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆. 又因为 $(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)I_5 - \alpha\beta Q_0$ 是正规算子, 所以存在一列单位向量 $x_n \in H_5$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)I_5 - \alpha\beta Q_0]x_n = 0. \quad (4)$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T \begin{pmatrix} [(\beta - \lambda)I_5 - \beta Q_0]x_n \\ -\beta D^* Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}x_n \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)I_5 - \alpha\beta Q_0]x_n \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

若 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中可逆, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(\beta - \lambda)I_5 - \beta Q_0]x_n = 0. \quad (5)$$

由式(4)~(5)得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\beta - \lambda)x_n = 0.$$

又由 $\{x_n\}$ 是单位向量列知 $\lambda(\beta - \lambda) = 0$, 从而 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = \beta$.

当 $\lambda = 0$ 时, $(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)I_5 - \alpha\beta Q_0 = \alpha\beta(I_5 - Q_0)$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆. 因为 $\alpha\beta \neq 0$, 所以 $I_5 - Q_0$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆. 又因为 $I_5 - Q_0$ 是正规算子, 所以存在一列单位向量 $y_n \in H_6$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} D y_n = 0.$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \beta Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} D y_n \\ \beta D^*(I_5 - Q_0) D y_n \end{pmatrix} = 0.$$

这与 T 可逆矛盾.

当 $\lambda = \beta$ 时, $(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)I_5 - \alpha\beta Q_0 = -\alpha\beta Q_0$ 在 $B(H_5)$ 中不可逆. 由 $\alpha\beta \neq 0$ 知 Q_0 在 $B(H_5)$ 中不可逆, 又由 Q_0 是正规算子知存在一列单位向量 $z_n \in H_6$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_0^{\frac{1}{2}} D z_n = 0.$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T \begin{pmatrix} 0 \\ z_n \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \beta(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} Q_0^{\frac{1}{2}} D z_n \\ -\beta D^* Q_0 D z_n \end{pmatrix} = 0.$$

这与 T 可逆矛盾. 于是 T 在 $B(H_5 \oplus H_6)$ 中不可逆. 因此, 有

$$\begin{aligned} T \text{ 在 } B(H_5 \oplus H_6) \text{ 中不可逆} &\Leftrightarrow RT \text{ 在 } B(H_5 \oplus H_6) \text{ 中不可逆} \Leftrightarrow (\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)I_5 - \alpha\beta Q_0 \text{ 在 } B(H_5) \text{ 中不可逆} \\ &\Leftrightarrow \frac{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)}{\alpha\beta} I_5 - Q_0 \text{ 在 } B(H_5) \text{ 中不可逆} \Leftrightarrow \frac{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)}{\alpha\beta} \in \sigma(Q_0). \end{aligned}$$

于是, 由

$$\lambda \in \sigma(\alpha P + \beta Q) \Leftrightarrow \frac{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)}{\alpha\beta} \in \sigma(Q_0)$$

得

$$\sigma(\alpha P + \beta Q) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)}{\alpha\beta} \in \sigma(Q_0) \right\} = \left\{ \frac{\alpha + \beta \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta\mu}}{2} : \mu \in \sigma(Q_0) \right\}.$$

推论 1 设 P, Q 是可分复 Hilbert 空间上的正则投影对, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 且 $\alpha\beta \geq 0$, 则

$$\|\alpha P + \beta Q\| = \frac{|\alpha| + |\beta| + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta\|PQ\|^2}}{2}.$$

证明 因为 $\sigma(PQ) \setminus \{0\} = \sigma(PQP) \setminus \{0\}$, 所以

$$r(PQ) = r(PQP) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(Q_0)\} = \|Q_0\|.$$

又由 Altwaijry et al. (2025) 的定理 2.1 可得 $\|Q_0\| = \|PQ\|^2$, 故

$$\|\alpha P + \beta Q\| = r(\alpha P + \beta Q) = \frac{|\alpha| + |\beta| + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta\|PQ\|^2}}{2}.$$

注3 当 $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 时, 推论 1 的结论不一定成立. 例设 $H = \mathbb{C}^2$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

则

$$\|PQ\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \|PQ\|^2 = \frac{1}{2}.$$

取 $\alpha = 1 + i, \beta = 1 - i$, 则

$$\frac{|\alpha| + |\beta| + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta\|PQ\|^2}}{2} = \sqrt{2}.$$

另一方面, 由

$$\alpha P + \beta Q = (1 + i)P + (1 - i)Q = \begin{pmatrix} \frac{3+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix},$$

计算得

$$\|\alpha P + \beta Q\| = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2} \neq \sqrt{2}.$$

2 投影对代数组合的谱和范数

由式(1)~(2)知

$$PQ + QP = 2I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} 2Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$PQ - QP = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} 0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ -D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$P + Q - PQ = I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} I_5 & 0 \\ D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*(I_5 - Q_0)D \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$PQP = I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$PQ = I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\alpha P + \beta Q = (\alpha + \beta)I_1 \oplus \alpha I_2 \oplus \beta I_3 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} \alpha I_5 + \beta Q_0 & \beta Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ \beta D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}} & \beta D^*(I_5 - Q_0)D \end{pmatrix}. \quad (11)$$

由定理 1 及式(6)~(11)可得下面的定理 3. 定理 3 给出了可分复 Hilbert 空间上投影对的积, Jordan 积, 三乘 Jordan 积, Lie 积和拟积的谱.

定理 3 设 P, Q 是可分复 Hilbert 空间 H 上如式(1)~(2)所示的投影对, 则以下结论成立:

- (i) $\sigma(PQ + QP) = \{\mu \pm \sqrt{\mu} : \mu \in \sigma(Q_0)\} \cup B_1$, 其中 $B_1 \subseteq \{0, 2\}$.
- (ii) $\sigma(PQ - QP) = \{\pm i\sqrt{\lambda(1-\lambda)} : \lambda \in \sigma(Q_0)\} \cup B_2$, 其中 $B_2 \subseteq \{0\}$.
- (iii) $\sigma(P + Q - PQ) = \sigma(P + Q - QP) = \{1\} \cup \{1 - \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda \in \sigma(Q_0)\} \cup B_3$, 其中 $B_3 \subseteq \{0\}$.
- (iv) $\sigma(PQP) = \sigma(QPQ) = \sigma(PQ) = \sigma(QP) = \{0\} \cup \{\lambda : \lambda \in \sigma(Q_0)\} \cup B_4$, 其中 $B_4 \subseteq \{1\}$.

且满足

- (a) $0 \in B_1$ 当且仅当 H_2, H_3, H_4 中至少有一个不为 $\{0\}$, $2 \in B_1$ 当且仅当 $H_1 \neq \{0\}$.
- (b) $0 \in B_2$ 当且仅当 H_1, H_2, H_3, H_4 中至少有一个不为 $\{0\}$.
- (c) $0 \in B_3$ 当且仅当 $H_4 \neq \{0\}$.
- (d) $1 \in B_4$ 当且仅当 $H_1 \neq \{0\}$.

定理 4 设 P, Q 是可分复 Hilbert 空间 H 上如式(1)~(2)所示的投影对, $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则

$$\sigma(\alpha P + \beta Q) = \left\{ \frac{\alpha + \beta \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta\mu}}{2} : \mu \in \sigma(Q_0) \right\} \cup B,$$

其中 $B \subseteq \{0, \alpha, \beta, \alpha + \beta\}$, 且满足 $0 \in B$ 当且仅当 $H_4 \neq \{0\}$; $\alpha \in B$ 当且仅当 $H_2 \neq \{0\}$; $\beta \in B$ 当且仅当 $H_3 \neq \{0\}$; $\alpha + \beta \in B$ 当且仅当 $H_1 \neq \{0\}$.

下面的定理研究了两个非零投影对的和、差、积、Jordan 积和 Lie 积的范数之间的关系.

定理 5 设 $P, Q \in P(H)$ 是非零投影对, 则以下结论成立.

- (i) $\|P - Q\|^2 = 1 - \|PQ\|^2 \Leftrightarrow \|PQ + QP\| = \frac{1}{2}(\|P + Q\|^2 - \|P - Q\|^2)$.
- (ii) $\|P - Q\| = 1 - \|PQ\| \Leftrightarrow \|PQ + QP\| = \|P + Q\| - \|P - Q\|$.

证明 由 Du et al.(2005)的命题 5 的推论 7 知

$$\|P - Q\| = \begin{cases} 1, & H_2 \neq \{0\} \text{ 或 } H_3 \neq \{0\}, \\ \|I_5 - Q_0\|^{\frac{1}{2}}, & H_2 = H_3 = \{0\}. \end{cases} \quad (12)$$

由

$$PQ = I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I_5 - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知

$$\|PQ\| = \begin{cases} 1, & H_1 \neq \{0\}, \\ \|Q_0\|^{\frac{1}{2}}, & H_1 = \{0\}. \end{cases} \quad (13)$$

则由式(6)知

$$\|PQ + QP\| = \begin{cases} 2, & H_1 \neq \{0\}, \\ \|Q_0\|^{\frac{1}{2}} + \|Q_0\|, & H_1 = \{0\}, \end{cases} \quad (14)$$

$$\|P + Q\| = \begin{cases} 2, & H_1 \neq \{0\}, \\ 1 + \|Q_0\|^{\frac{1}{2}}, & H_1 = \{0\}. \end{cases} \quad (15)$$

- (i) 必要性. 设 $\|P - Q\|^2 = 1 - \|PQ\|^2$.

若 $H_2 \neq \{0\}$ 或 $H_3 \neq \{0\}$, 则 $\|P - Q\| = 1$, 从而 $\|PQ\| = 0$. 由式(13)知 $H_1 = \{0\}$ 且 $\|Q_0\| = 0$. 由式(14)~(15)知

$$\|PQ + QP\| = 0, \quad \|P + Q\| = 1.$$

因此,

$$\|PQ + QP\| = 0 = \frac{1}{2}(\|P + Q\|^2 - \|P - Q\|^2).$$

若 $H_2 = H_3 = H_1 = \{0\}$, 则由式(12)~(15)知

$$\|P - Q\| = \|I_5 - Q_0\|^{\frac{1}{2}}, \quad \|PQ\| = \|Q_0\|^{\frac{1}{2}},$$

$$\|PQ + QP\| = \|Q_0\|^{\frac{1}{2}} + \|Q_0\|, \quad \|P + Q\| = 1 + \|Q_0\|^{\frac{1}{2}}.$$

由 $\|P - Q\|^2 = 1 - \|PQ\|^2$ 知 $\|I_5 - Q_0\| = 1 - \|Q_0\|$. 于是,

$$\begin{aligned} \|P + Q\|^2 - \|P - Q\|^2 &= \left(1 + \|Q_0\|^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \|I_5 - Q_0\| = 1 + 2\|Q_0\|^{\frac{1}{2}} + \|Q_0\| - 1 + \|Q_0\| \\ &= 2\left(\|Q_0\|^{\frac{1}{2}} + \|Q_0\|\right) = 2\|PQ + QP\|. \end{aligned}$$

因此,

$$\|PQ + QP\| = \frac{1}{2}(\|P + Q\|^2 - \|P - Q\|^2).$$

若 $H_2 = H_3 = \{0\}$, $H_1 \neq \{0\}$, 则 $\|PQ\| = 1$. 由 $\|P - Q\|^2 = 1 - \|PQ\|^2$ 知 $\|P - Q\| = 0$. 由式(14)~(15)知

$$\|PQ + QP\| = \|P + Q\| = 2.$$

因此,

$$\|PQ + QP\| = 2 = \frac{1}{2}(\|P + Q\|^2 - \|P - Q\|^2).$$

充分性. 设 $\|PQ + QP\| = \frac{1}{2}(\|P + Q\|^2 - \|P - Q\|^2)$.

若 $H_1 \neq \{0\}$, 由式(13)~(15)知

$$\|PQ\| = 1, \quad \|PQ + QP\| = \|P + Q\| = 2.$$

因此,

$$\|P - Q\|^2 = 0 = 1 - \|PQ\|^2.$$

若 $H_1 = \{0\}$, 由式(13)~(15)知

$$\|PQ\| = \|Q_0\|^{\frac{1}{2}}, \quad \|PQ + QP\| = \|Q_0\|^{\frac{1}{2}} + \|Q_0\|, \quad \|P + Q\| = 1 + \|Q_0\|^{\frac{1}{2}}.$$

因此, 由

$$\|PQ + QP\| = \frac{1}{2}(\|P + Q\|^2 - \|P - Q\|^2)$$

知

$$\|P - Q\|^2 = 1 - \|Q_0\| = 1 - \|PQ\|^2.$$

(ii) 必要性. 设 $\|P - Q\| = 1 - \|PQ\|^2$.

若 $H_2 \neq \{0\}$ 或 $H_3 \neq \{0\}$, 则 $\|P - Q\| = 1$, 从而 $\|PQ\| = 0$. 由式(13)知 $H_1 = \{0\}$ 且 $\|Q_0\| = 0$. 由式(14)~(15)知

$$\|PQ + QP\| = 0, \quad \|P + Q\| = 1.$$

因此,

$$\|PQ + QP\| = 0 = \|P + Q\| - \|P - Q\|.$$

若 $H_2 = H_3 = H_1 = \{0\}$, 则由式(12)~(15)知

$$\|P - Q\| = \|I_5 - Q_0\|^{\frac{1}{2}}, \quad \|PQ\| = \|Q_0\|^{\frac{1}{2}},$$

$$\|PQ + QP\| = \|Q_0\|^{\frac{1}{2}} + \|Q_0\|, \quad \|P + Q\| = 1 + \|Q_0\|^{\frac{1}{2}}.$$

由 $\|P - Q\| = 1 - \|PQ\|^2$ 知 $\|I_5 - Q_0\|^{\frac{1}{2}} = 1 - \|Q_0\|$. 于是,

$$\|PQ + QP\| = \|Q_0\|^{\frac{1}{2}} + \|Q_0\| = 1 + \|Q_0\|^{\frac{1}{2}} - (1 - \|Q_0\|) = 1 + \|Q_0\|^{\frac{1}{2}} - \|I_5 - Q_0\|^{\frac{1}{2}} = \|P + Q\| - \|P - Q\|.$$

若 $H_2 = H_3 = \{0\}$, $H_1 \neq \{0\}$, 则 $\|PQ\| = 1$, 从而 $\|P - Q\| = \|I_5 - Q_0\|^{\frac{1}{2}} = 0$. 由式(14)~(15)知

$$\|PQ + QP\| = \|P + Q\| = 2.$$

因此,

$$\|PQ + QP\| = 2 = \|P + Q\| - \|P - Q\|.$$

充分性. 设 $\|PQ + QP\| = \|P + Q\| - \|P - Q\|$.

若 $H_1 \neq \{0\}$, 由式(13)~(15)知

$$\|PQ\| = 1, \quad \|PQ + QP\| = \|P + Q\| = 2.$$

因此,

$$\|P - Q\| = 0 = 1 - \|PQ\|^2.$$

若 $H_1 = \{0\}$, 由式(12)~(15)知

$$\|PQ\| = \|Q_0\|^{\frac{1}{2}}, \quad \|PQ + QP\| = \|Q_0\|^{\frac{1}{2}} + \|Q_0\|, \quad \|P + Q\| = 1 + \|Q_0\|^{\frac{1}{2}}.$$

因此,

$$\|P - Q\| = 1 - \|Q_0\| = 1 - \|PQ\|^2.$$

定理 6 设 $P, Q \in P(H)$ 是非零投影对. 若 $\|P - Q\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 则 $\|PQ - QP\| = \frac{1}{2}$.

证明 由 Bikchentaev(2022)中的定理 3.1 的推论 3.2 知, 当 $\|P - Q\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时有

$$\|PQ - QP\| = \|P - Q\| \sqrt{1 - \|P - Q\|^2} = \frac{1}{2}.$$

参考文献:

- 蒋万林, 左可正, 李昱, 2021. 两个正交投影算子组合的性质[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 55(3): 356-364.
- 马楠, 李愿, 2024. 两个正交投影组合的谱和范数[J]. 山东大学学报(理学版), 59(12): 102-108.
- 吴文明, 蒋叶聪, 阮颖彬, 等, 2021. 投影算子组的联合谱[J]. 中国科学:数学, 51(5): 711-722.
- Altwaijry N, Conde C, Feki K, et al, 2025. Operator norm of certain sums of orthogonal projections in Hilbert spaces[J]. Bull Malays Math Sci Soc, 48(5): 157.
- Bikchentaev A, 2022. Differences and commutators of projections on a Hilbert space[J]. Int J Theor Phys, 61(1): 2.
- Böttcher A, Spitkovsky I M, 2010. A gentle guide to the basics of two projections theory[J]. Linear Algebra Appl, 432(6): 1412-1459.
- Conde C, 2022. A note about the norm of the sum and the anticommutator of two orthogonal projections[J]. J Math Anal Appl, 505(2): 125650.
- Cui J L, Li C K, 2012. Maps preserving peripheral spectrum of Jordan products of operators[J]. Oper Matrices, 6(1): 129-146.
- Du H K, Deng C Y, 2005. A new characterization of gaps between two subspaces[J]. Proc Amer Math Soc, 133(10): 3065-3070.
- Halmos P R, 1969. Two subspaces[J]. Trans Amer Math Soc, 144: 381-389.
- Klaja H, 2014. The numerical range and the spectrum of a product of two orthogonal projections[J]. J Math Anal Appl, 411(1): 177-195.
- Li Q H, 2004. Commutators of orthogonal projections[J]. Nihonkai Math J, 15(1): 93-99.
- Wang Y Q, Du H K, 2008. Norms of commutators of self-adjoint operators[J]. J Math Anal Appl, 342(1): 747-751.